



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΜΑΘΗΜΑ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.**

**ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ**

12:11



**φροντιστήρια  
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ**  
Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3-6-2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ  
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Σχολικό σελίδα 133

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ . Πράγματι:

- Αν  $x_1 = x_2$  τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμή. Επομένως υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  ①.

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε λόγω της ① είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

A.2. Σχολικό σελίδα 51

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

A.3. Σχολικό σελίδα 185

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

A.4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

## ΘΕΜΑ Β

$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 2 \ln(x-1)$

$g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

**B.1.** Για την συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 2 : \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \geq 2 : \sqrt{x-2} > 0\} = \\ = \{x \geq 2 : x-2 > 0\} = \{x \geq 2 : x > 2\} = (2, +\infty)$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$$

**B.2.**  $h(x) = \ln(x-2)$ ,  $x \in (2, +\infty)$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A_h$  με  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \stackrel{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα  $h \nearrow$  στο διάστημα  $(2, +\infty)$  άρα  $h^{-1}$ .. άρα  $h$  αντιστρέφεται.

β' τρόπος

Για κάθε  $x_1, x_2 \in A_h$  με  $h(x_1) = h(x_2)$  έχουμε:

$$h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \stackrel{\ln x^{-1} \searrow}{\Leftrightarrow} x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα  $h^{-1}$ .. άρα  $h$  αντιστρέφεται.

γ' τρόπος

Η  $h$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για  $x > 2$  με

$$h'(x) = [\ln(x-2)]' = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ για } x \in (2, +\infty)$$

Άρα  $h \nearrow$  στο διάστημα  $(2, +\infty)$  άρα  $h^{-1}$ .. άρα  $h$  αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης, θέτουμε  $y = h(x)$ .

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \stackrel{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^y = e^{\ln(x-2)} \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2, x \in A_h$$

Έχουμε  $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$  που ισχύει για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ , άρα  $A_{h^{-1}} = \mathbb{R}$ .

Επομένως  $h^{-1}(y) = e^y + 2$  με  $y \in \mathbb{R}$  άρα  $h^{-1}(x) = e^x + 2$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

β' τρόπος

Η  $h$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$h((2, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2), \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \right) = \mathbb{R} \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln u \stackrel{u \rightarrow 0^+}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{v=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln v \stackrel{v \rightarrow +\infty}{=} \lim_{v \rightarrow +\infty} \ln v = +\infty$$

$$\text{B.3. } \lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \ln(x-2) \cdot \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \right)^{(-\infty)^2} = -\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 \ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \cdot \frac{1}{x-1} \cdot (x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln u = -\infty$$

## ΘΕΜΑ Γ

### Γ.1.

i) Η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  οπότε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Αν } \kappa \neq 0 \text{ έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} -\infty, & \kappa < 0 \\ +\infty, & \kappa > 0 \end{cases} \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Αν } \kappa = 0 \text{ έχουμε ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = 0 \text{ για κάθε } \mu \in \mathbb{R}$$

άρα η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

ii) Η  $y = x$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της  $f$  στην αρχή των αξόνων άρα  $f(0) = 0$  που ισχύει και  $f'(0) = 1$ .

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - (\mu x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - (\mu x)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Άρα } f'(0) = \mu \Rightarrow \mu = 1$$

$$\text{Γ.2. Έχουμε } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\text{i) Η } f \text{ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow -x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} < 0 \Rightarrow -x^2 + 1 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$-$
$f$	$\searrow$	ΤΟΠ.ΕΛ.	$\nearrow$	ΤΟΠ.ΜΕΓ. $\searrow$

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x = -1$  το  $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$  και ολικό μέγιστο στο  $x = 1$

το  $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

ii) Για  $A_1 = (-\infty, -1)$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Διότι  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Για  $A_2 = [-1, 1]$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα  $f(A_2) = [f(-1), f(1)] = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

Διότι  $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Για  $A_3 = (1, +\infty)$  η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_3) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = \left( 0, \frac{1}{2} \right)$$

Διότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Επομένως  $f(D_f) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

Για την εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$  έχουμε:

Αν  $\alpha \neq 0$  είναι  $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2} = f_{\max}$  άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν  $\alpha = 0$  είναι  $f(x) = \frac{1}{2}$  οπότε μοναδική ρίζα η  $x = 1$ .

Γ.3.

$$\left. \begin{aligned} I_\nu &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx \quad \textcircled{1} \\ I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+1+2}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} (1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[ \frac{x^{2\nu+1+1}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln(1+1) - \ln(0+1)) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$$

$$\text{για } \nu = 0 \text{ έχουμε } \left. \begin{aligned} I_0 + I_1 &= \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2} \\ I_0 &= \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{για } \nu = 1 \text{ έχουμε } I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow I_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Έστω  $h(x) = g(x) + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως πράξεις συνεχών, αφού  $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} h(-1) &= g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) &= g(0) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(-1) \cdot h(0) < 0$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει  $x_1 \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε  $h(x_1) = 0$ .

Έστω ότι υπάρχει  $x_2 \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε  $h(x_2) = 0$ .

Έστω  $x_1 < x_2$ .

- Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$ .
- Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$ .
- $h(x_1) = h(x_2) = 0$

Από θεώρημα Rolle, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε  $h'(\xi) = 0$ .

$h'(x) = g'(x) + 1$  άρα  $g'(\xi) + 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = -1$  άτοπο, αφού  $g'(x) \neq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Τελικά υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε  $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$ .

β' τρόπος

Έστω  $h(x) = g(x) + x$  συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων με  $h(-1) = g(-1) - 1 < 0$  διότι  $0 < g(x) < 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα  $g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0$

$$h(0) = g(0) > 0$$

Άρα  $h(-1) \cdot h(0) < 0$ , επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα  $x_1 \in (-1, 0)$  τέτοια ώστε  $g(x_1) + x_1 = 0$ .

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη με  $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$  αφού  $g'(x) \neq -1$  και επειδή η  $g$  έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και  $h'$  είναι συνεχής, οπότε διατηρεί πρόσημο, άρα η  $h$  είναι γνησίως μονότονη, άρα "1-1", οπότε η  $h(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα την  $x_1$ .

**Δ.2.** Αφού  $f$  παραγωγίσιμη στο  $A_f$  άρα και στο  $x_0 = 0$ , άρα θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(g(x) + x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\kappa x}{x} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa = \\ &= 2 \cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

**Δ.3.** Για  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  έχουμε  $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$  συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0 \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 0$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$x \geq 0 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

Έχουμε την εξίσωση  $3f'(x) = \pi \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\pi}{3}$

Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  έτσι  $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2 \cdot 1 + \infty - 3 \frac{\pi}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1(+\infty) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

$\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$  άρα υπάρχει  $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο ώστε  $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  η ρίζα είναι μοναδική.

#### Δ.4.

i) Η  $h$  είναι συνεχής στο  $(x_1, 0]$  και δεν έχει ρίζες γιατί η  $x_1$  είναι η μοναδική ρίζα.

Άρα η  $h$  διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$h(0) = g(0) > 0 \text{ γιατί } 0 < g(x) < 1, x \in \mathbb{R}$$

Άρα  $h(x) > 0$  για κάθε  $(x_1, 0]$  οπότε  $h(x) \geq 0$  για  $x \in [x_1, 0]$ .

Αφού  $f(x) = x^2 \cdot h(x)$  για  $x \in [x_1, 0]$  και  $x^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in [x_1, 0]$  και  $h(x) \geq 0$  για  $x \in [x_1, 0]$ , τότε και  $f(x) \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$ .

ii) Έστω  $\Omega_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = x_1$  και  $x = 0$ .

Έστω  $\Omega_2$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ .

Λόγω της συνέχειας της  $f$  στο διάστημα  $\left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$  και αφού  $f(x) \geq 0$  στο ίδιο διάστημα,

$$\text{έχουμε ότι } E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 f(x) dx \text{ και } E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx.$$

$$E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 (x^2 \cdot g(x) + x^3) dx = \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx = \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x) dx.$$

Αφού η  $g$  είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο έχουμε ότι:

$$\int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x)\right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} \cdot g'(x)$$

$$\int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x) dx = -\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 g'(x) \cdot x^3 dx$$

Αφού  $g(x_1) = -x_1$  έχουμε ότι:

$$\int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot g(x) dx = \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx \quad \textcircled{1}$$

$$\int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^4}{4}\right)' dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = -\frac{x_1^4}{4} \text{ άρα } \int_{x_1}^0 x^3 dx = -\frac{x_1^4}{4} \quad \textcircled{2}$$

Από  $\textcircled{1}$  και  $\textcircled{2}$  έχουμε ότι:

$$E(\Omega_1) = -\frac{x_1^4}{4} + \frac{x_1^4}{3} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 (g'(x)) dx \text{ δηλαδή } E(\Omega_1) = \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 (g'(x)) dx \quad \textcircled{3}$$

$$E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx$$

$$\text{Για } x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ έχουμε ότι } \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow \varepsilon\varphi x = -(\ln(\sigma\upsilon\nu x))'$$

Άρα

$$E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2\right)' dx$$

$$E(\Omega_2) = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$E(\Omega_2) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(-2\sigma\upsilon\nu 0 - \ln(\sigma\upsilon\nu 0) - \frac{3}{2}0^2\right)$$

$$E(\Omega_2) = -1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} + 2$$

$$E(\Omega_2) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad \textcircled{4}$$

Γνωρίζουμε ότι ο άξονας  $y'y$  χωρίζει το χωρίο  $\Omega$  σε δύο ίσα χωρία  $\Omega_1$  και  $\Omega_2$  όπως ορίστηκαν, θα πρέπει:

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \stackrel{\textcircled{3}}{\stackrel{\textcircled{4}}{\Rightarrow}} \frac{x_1^4}{12} - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 (g'(x)) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^4}{4} - \int_{x_1}^0 x^3 (g'(x)) dx = 3 + 3 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^0 x^3 (g'(x)) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$