

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ ΕΠΑΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:53



φροντιστήρια
πουκαμισάς

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 03/06/2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A.1.

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v , με μέση τιμή $\bar{x}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών, δηλαδή :

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v}, \text{ είναι ίσος με το μηδέν.}$$

$$\text{Έχουμε: } \frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

A.2.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

A.3. α) $\wedge$ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) $\wedge$

A.4. α) $(c)' = 0$ β) $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0			
1	15		
2	11		
3	8		
4	6		50
Σύνολο	50	100	

B.1.

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow \nu_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow \nu_1 + 40 = 50 \Leftrightarrow \nu_1 = 50 - 40 \Leftrightarrow \nu_1 = 10$$

$$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 100 = \frac{10}{50} \cdot 100 = 20$$

$$f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu} \cdot 100 = \frac{15}{50} \cdot 100 = 30$$

$$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 = \frac{11}{50} \cdot 100 = 22$$

$$f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu} \cdot 100 = \frac{8}{50} \cdot 100 = 16$$

$$f_5\% = \frac{\nu_5}{\nu} \cdot 100 = \frac{6}{50} \cdot 100 = 12$$

$$N_1 = \nu_1 = 10$$

$$N_2 = N_1 + \nu_2 = 10 + 15 = 25$$

$$N_3 = N_2 + \nu_3 = 25 + 11 = 36$$

$$N_4 = N_3 + \nu_4 = 36 + 8 = 44$$

$$N_5 = N_4 + \nu_5 = 44 + 6 = 50$$

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

B.2. Για την μέση τιμή, συμπληρώνουμε νέα στήλη $x_i \cdot \nu_i$

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	10	20	10	0
1	15	30	25	15
2	11	22	36	22
3	8	16	44	24
4	6	12	50	24
Σύνολο	50	100		85

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{85}{50} = \frac{170}{100} = 1,7$$

B.3. Έχουμε 50 παρατηρήσεις επομένως θέλουμε το ημιάθροισμα 25^{ης} και 26^{ης} παρατήρησης.

$$\delta = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ (25^η παρατήρηση το 1)}$$

B.4. α) Το πολύ 3 ώρες, άρα θέλουμε $F_4\% = f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20\% + 30\% + 22\% + 16\% = 88\%$

$$\text{ή αλλιώς } 100\% - f_5\% = 100\% - 12\% = 88\%$$

β) Έστω y_i οι νέες υπερωρίες, άρα έχουμε $y_i = x_i + 4$ επομένως $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x > 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2$$

Η μονοτονία της f προκύπτει από τον πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$-$
f	$\searrow$	Τ.ΕΛ.	$\nearrow$	Τ.ΜΕΓ.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$

Γ.2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ με τιμή $f(0) = \alpha$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ με τιμή $f(2) = 8 + \alpha$.

Επίσης, ότι το ημίθροισμα των τιμών των ακροτάτων είναι -8 σημαίνει ότι:

$$\frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 8 + \alpha}{2} = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12$$

Γ.3. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

Για το σημείο M έχουμε $f(1) = -2 + 6 - 12 = -8$. Επομένως είναι $M(1, f(1))$ ή $M(1, -8)$.

Επίσης είναι $f'(1) = -6 + 12 = 6$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M , είναι $\varepsilon: y = f'(1)x + \beta \Leftrightarrow y = 6x + \beta$.

$$\text{Το } M(1, -8) \in \varepsilon \Leftrightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=-8 \end{matrix} \Leftrightarrow -8 = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 6x - 14$.

Γ.4. Για $x \in [2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε ισχύει:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Έχουμε $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7, x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

Άρα $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = x^2 - 8x + 7, x \in \mathbb{R}$

Δ.2.

Για την μονοτονία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{14}{2} = 7 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 7)$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
f	↗	T.ΜΕΓ.	T.ΕΛΑΧ.	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 7]$

Δ.3. $2020, 2025 \in (7, +\infty)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$2020 < 2025 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

$\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in (1, 7)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

Οπότε $A > 0$

Δ.4. $f'(x) = x^2 - 8x + 7, x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2x - 8, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16^{(*)}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1 - \sqrt{3}^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(\cancel{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = \\ &= -6(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -12\sqrt{3} \end{aligned}$$

(*) $x^2 - 10x + 16 = 0$ με $\Delta = 36$ και $x_1 = 8, x_2 = 2$ άρα $x^2 - 10x + 16 = (x-8)(x-2)$

